الهومورفيزم البولياني

لتكن الحلقتين البوليانيتين A و B ندعو التطبيق f من A إلى B بالهومورفيزم البولياني (أو هومورفيزم بشكل كلي من غموض) إذا كان f هومومورفيزم أحادي الحلقة أي أن

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \forall x, y \in A$$

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \qquad \forall x, y \in A$$

وحسب الملاحظات السابقة نستنتج أن الهومورفيزم البولياني يحفظ جميع العمليات في جبر بول أي أن

$$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$$

$$f(x') = (f(x))'$$

$$f(0) = 0.$$

مبرهنة:

إذا كانت كل من A, B جبر بول و f تطبيق من A في B فإن القضايا التالية متكافئة

a) f هومورفيزم بولياني

b) من أجل أي عنصرين $x, y \in A$ فإن $f(x') = (f(x))'$ و $f(xy) = f(x) f(y)$

c) من أجل أي عنصرين $x, y \in A$ فإن $f(x') = (f(x))'$ و $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$

البرهان:

$b \Leftarrow a$

$\forall x \in A : f(x') = f(x+1) = f(x) + f(1) = f(x) + 1 = (f(x))'$

حسب $x + 1 = x'$

$c \Leftarrow b$

$$\forall x, y \in A ; f(x \vee y) = f(x' y')' = (f(x' y'))' = (f(x') f(y'))'$$

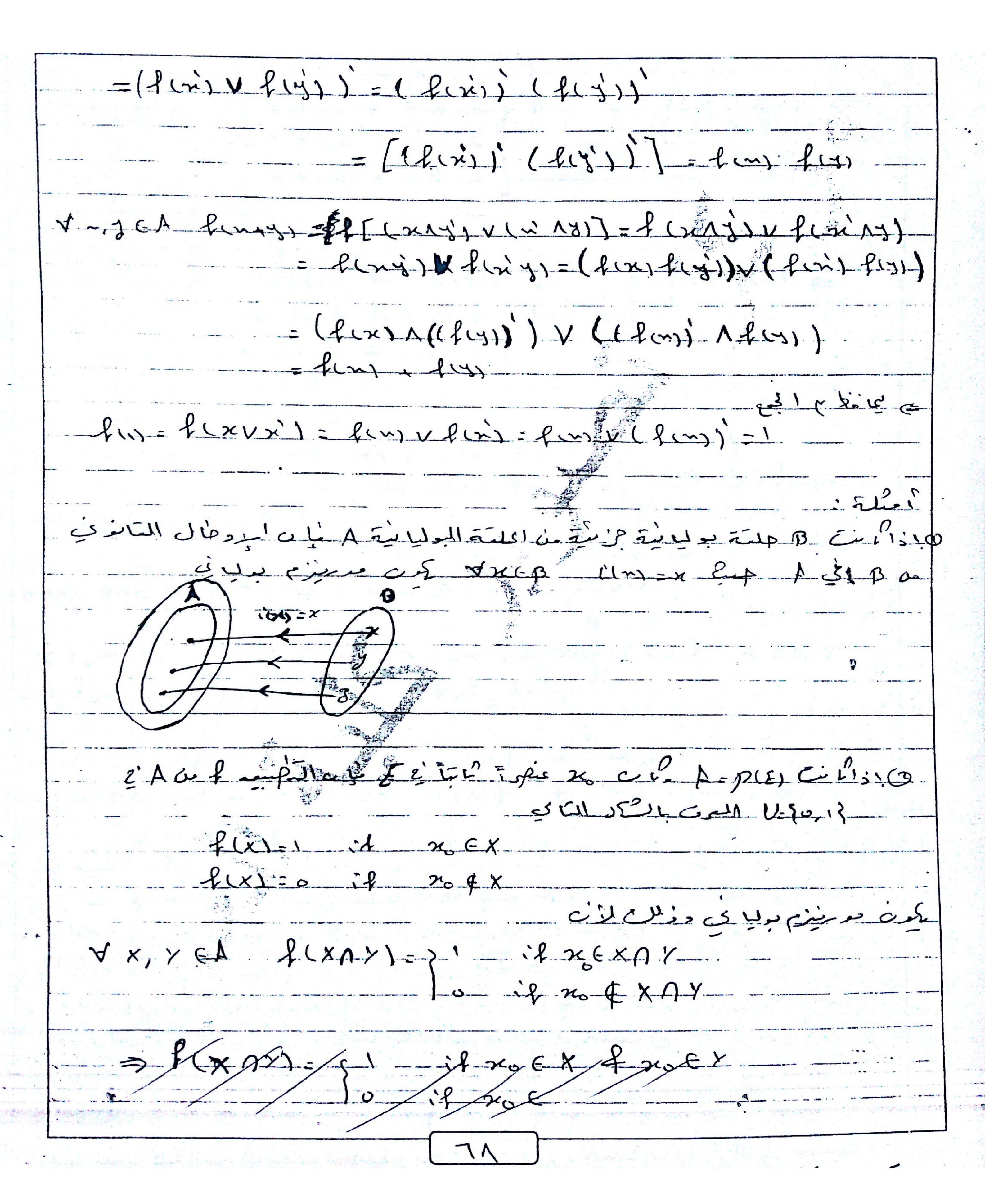
$$= (f(x'))' \vee (f(y'))'$$

$$= ((f(x))')' \vee ((f(y))')'$$

$$= f(x) \vee f(y)$$

$c \Leftarrow a$

$$\forall x, y \in A \quad f(x \cdot y) = f(x' \vee y')' = (f(x' \vee y'))'$$



$= (f(x') \vee f(y'))' = (f(x'))' (f(y'))'$

$= [(f(x'))' (f(y'))'] = f(x) f(y)$

$\forall x, y \in A \quad f(x+y) = f[(x \wedge y') \vee (x' \wedge y)] = f(x \wedge y') \vee f(x' \wedge y)$

$= f(xy') \vee f(x'y) = (f(x) f(y')) \vee (f(x') f(y))$

$= (f(x) \wedge (f(y))') \vee ((f(x))' \wedge f(y))$

$= f(x) + f(y)$

∴ يحافظ على الجمع

$f(1) = f(x \vee x') = f(x) \vee f(x') = f(x) \vee (f(x))' = 1$

أمثلة:

(١) إذا كانت B حلقة بوليانية جزئية من الحلقة البوليانية A فإن الإدخال التافه i من B إلى A حيث $i(x) = x \quad \forall x \in B$ يكون مورفيزم بولياني

(٢) إذا كانت $A = P(E)$ وكان x_0 عنصراً ثابتاً في E فإن التطبيق f من A إلى $U = \{0, 1\}$ المعرف بالشكل التالي

$f(X) = 1 \quad if \quad x_0 \in X$

$f(X) = 0 \quad if \quad x_0 \notin X$

يكون مورفيزم بولياني وذلك لأن

$$\forall X, Y \in A \quad f(X \wedge Y) = \begin{cases} 1 & if \ x_0 \in X \wedge Y \\ 0 & if \ x_0 \notin X \wedge Y \end{cases}$$

~~$\Rightarrow f(X \wedge Y) = \begin{cases} 1 & if \ x_0 \in X \ \& \ x_0 \in Y \\ 0 & if \ x_0 \in \end{cases}$~~

$$\Rightarrow f(X\cap Y)=\begin{cases}1 & \text{if } x_0\in X \ \& \ x_0\in Y\\ 0 & \text{if } \begin{cases} x_0\notin X \ \& \ x_0\in Y\\ x_0\in X \ \& \ x_0\notin Y\\ x_0\notin X \ \& \ x_0\notin Y\end{cases}\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(X\cap Y)=\begin{cases}1 & \text{if } f(X)=1 \ \& \ f(Y)=1\\ 0 & \text{if } \begin{cases} f(X)=0 \ \& \ f(Y)=1\\ f(X)=1 \ \& \ f(Y)=0\\ f(X)=0 \ \& \ f(Y)=0\end{cases}\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(X\cap Y)=\begin{cases}1 & \text{if } f(X)\,f(Y)=1\\ 0 & \text{if } f(X)\,f(Y)=0\end{cases}$$

أي انه في جميع الأحوال يكون

$$\Rightarrow f(X\cap Y)=f(X)\,f(Y)$$

((لاحظ: ان نأخذ التشاكل من المجموعات $A=P(E)$ الى المستقر $U=\{0,1\}$))

$$\forall X\in A \quad f(X')=\begin{cases}1 & \text{if } x_0\in X'\\ 0 & \text{if } x_0\notin X'\end{cases} \Rightarrow f(X')\begin{cases}1 & \text{if } x_0\notin X\\ 0 & \text{if } x_0\in X\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(X')=\begin{cases}1 & \text{if } f(X)=0\\ 0 & \text{if } f(X)=1\end{cases} \Rightarrow f(X')=\begin{cases}1 & \text{if } (f(X))'=1\\ 0 & \text{if } (f(X))'=0\end{cases}$$

تمارين:

إذا كان f مورفيزم بولياني من A في B بأننا نعرف

- المونومورفيزم البولياني هو مورفيزم بولياني متباين
- ابيمورفيزم بولياني هو مورفيزم بولياني غامر
- اندومورفيزم بولياني B اذا كان $A=B$ مع نفس البنية
- اوتومورفيزم بولياني اذا كان اندومورفيزم + تقابل

تركيب المورفيزمات :

لتكن A, B, C ثلاث حلقات بوليانية والمورفيزمات $f: A \to B$

$g: B \to C$

مبرهنة :

التركيب $g \circ f$ يكون مورفيزم بولياني من A إلى C إذا كانت f, g مونومورفيزمات (أو ابيمورفيزم أو ايزومورفيزمات) فإن $g \circ f$ يكون أيضاً

البرهان :

$\forall x, y \in A \qquad g \circ f: A \to C$

$(g \circ f)(xy) = g(f(xy))$

$= g(f(x) f(y))$

$= (g f)(x) (g f)(y)$

$= (g \circ f)(x) (g \circ f)(y)$

وبنفس الطريقة نتحقق من الشرط الثاني وباقي الشروط

مبرهنة :

إذا كان f ايزومورفيزم بولياني من A إلى B فإن التطبيق العكسي f^{-1} يكون ايزومورفيزم بولياني من B إلى A

البرهان :

ليكن $x_1, y_1 \in B \overset{\text{تقابل}}{\Longleftarrow} x, y \in A$ بحيث يكون $f(x) = x_1$ و $f(y) = y_1$ ومنه

$\Leftarrow x = f^{-1}(x_1)$ و $y = f^{-1}(y_1)$

$\Rightarrow x_1 y_1 = f(x) f(y) = f(xy) \Rightarrow xy = f^{-1}(x_1 y_1)$

$\Rightarrow f^{-1}(x_1) f^{-1}(y_1) = f^{-1}(x_1 y_1)$

الشرط الثاني

$\forall x_1 \in B \Rightarrow \exists x \in A ; f(x) = x_1 \Rightarrow x = f^{-1}(x_1)$

$x_1 = f(x) \Rightarrow x_1' = (f(x))' \Rightarrow x_1' = f(x') \Rightarrow x' = f^{-1}(x_1')$

$\Rightarrow (f^{-1}(x_1))' = f^{-1}(x_1')$

إذن f^{-1} ايزومورفيزم بولياني

المورفيزمات والحلقات الجزئية :

ليكن f مورفيزم بولياني من A إلى B ولتكن A_1 حلقة بوليانية جزئية من A ، B_1 حلقة بوليانية جزئية من B

مبرهنة :

$f(A_1)$ حلقة بوليانية جزئية من B

$f^{-1}(B_1)$ حلقة بوليانية جزئية من A

البرهان :

$f(A_1) \neq \Phi$ لأن A_1 تحتوي على العنصرين 0 ، 1 حيث $f(0)=0$ ، $f(1)=1$) ليكن $x_1, y_1 \in f(A_1)$

هذا يؤدي أنه يوجد عنصران $x, y \in A_1$ بحيث يكون $f(x)=x_1$ ، $f(y)=y_1$

$x_1 y_1 = f(x) f(y) = f(\underbrace{xy}_{\in A_1}) \in f(A_1)$

$x_1' = (f(x))' = f(\underbrace{x'}_{\in A_1}) \in f(A)$

ومنه نستنتج أن $f(A_1)$ حلقة بوليانية جزئية من B

$f^{-1}(B_1) \neq \Phi$ لأنها تحتوي على العنصرين $f^{-1}(0)=0$ ، $f^{-1}(1)=1$

$\forall x, y \in f^{-1}(B_1) \Rightarrow f(x), f(y) \in B_1 \Rightarrow f(x) f(y) = f(xy) \in B_1$
$\Rightarrow xy \in f^{-1}(B_1)$

$\forall x \in f^{-1}(B_1) \Rightarrow f(x) \in B_1 \Rightarrow (f(x))' \in B_1 \Rightarrow f(x') \in B_1$
$\Rightarrow x' \in f^{-1}(B_1)$ إذن $f^{-1}(B_1)$ حلقة بوليانية جزئية من A